Totalvergleich von Matrixtransformationen

Habilitationsschrift
im Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Wolfgang Beekmann
aus Berlin

1971

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547611_0074

Totalvergleich von Matrixtransformationen

Habilitationsschrift
im Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Wolfgang Beekmann
aus Berlin

1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1

2. Bezeichnungen und Grundlagen 4

3. Vergleichssätze für normale Matrizen mit diagonal-positiver Inversen 9

4. Bewichtete Mittel 16

5. Nörlund - Verfahren 22

6. Zwischen - Matrizen 29

7. Ketten von Nörlund - Matrizen 38

Literaturverzeichnis 48

1. Einleitung

Wir betrachten normale (reelle) Matrizen, $A = (a_{nk})_{n,k=0,1,2,\ldots}$, d.h. Matrizen, die

(1) $\qquad a_{nk} = 0$ für $k > n$ und $a_{nn} \neq 0$ für $n \geq 0$

erfüllen. Eine solche Matrix definiert eine Folge - Folge - Transformation

(2) $\qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} s_k \qquad (n = 0,1,\ldots);$

diese ist umkehrbar und ihre Umkehrung wird durch die zweiseitige (ebenfalls normale) Inverse $A^{-1} = (\alpha_{nk})$ vermittelt:

(3) $\qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} t_k \qquad (n = 0,1,\ldots).$

Die Transformation (2) definiert ihrerseits ein Limitierungsverfahren, das alle Folgen $s = \{s_n\}$ erfaßt, welche in konvergente Folgen $As = t = \{t_n\}$ abgebildet werden. Die Gesamtheit dieser Folgen, das Wirkfeld von A, hat man prinzipiell in der Hand, wenn die Umkehrtransformation, also A^{-1}, bekannt ist, doch läßt sich die Inverse im Einzelfall oft schwer in einer handlichen Form angeben.

Aber schon eine teilweise Kenntnis der Inversen führt zu weit-

reichenden Ergebnissen. So hat man z.B. schon frühzeitig davon Gebrauch gemacht, daß in einer Reihe von Fällen A^{-1} nur in der Hauptdiagonalen positive Elemente besitzt. Zur Vereinfachung der Sprechweise führen wir folgende Bezeichnung ein:

Definition:

Eine Matrix $B = (b_{nk})$ heiße diagonal-positiv, wenn

(4) $\qquad b_{nn} > 0 \quad (n \geq 0)$ und $b_{nk} \leq 0 \quad (n \neq k)$

erfüllt ist.

Im folgenden sollen normale Matrizen A, deren Inverse diagonal-positiv sind, im Hinblick auf ihre Rolle bei Vergleichssätzen systematisch untersucht werden. Die Grundgedanken sind vielfach schon in älteren Arbeiten über spezielle Verfahren, teilweise in versteckter Form enthalten, so daß die Ergebnisse nicht prinzipiell neu sind. Doch führt der hier eingenommene Standpunkt, der das Auftreten diagonal-positiver Matrizen betont, zur Übersichtlichkeit einer einheitlichen Theorie, welche eine Reihe bekannter Einzelergebnisse als Spezialfälle enthält. Anregungen hierzu verdanke ich vor allem den Arbeiten von Riesz [23], Agnew [32], Bosanquet [41,66], Sargent [46], Jurkat - Peyerimhoff [52, 65], sowie Wilansky und Zeller [49ff.]. An dieser Stelle möchte ich

auch Herrn K. Zeller selbst für wertvolle Ratschläge danken.

Die Literaturzitate betreffen vor allem Arbeiten, die sich ausdrücklich mit dem Totalvergleich befassen. Von der umfangreichen Literatur über den gewöhnlichen Vergleich werden nur wenige grundlegende Arbeiten zitiert, soweit die Ergebnisse beim Aufbau der Theorie Verwendung finden.

2. Bezeichnungen und Grundlagen.

Wie üblich bezeichnen wir mit m, c, c_o die Vektorräume aller beschränkten, aller konvergenten bzw. aller zu Null konvergenten (reellen) Folgen, die durch Einführung der Norm

$$\| s \|_\infty = \sup_{n \geq o} |s_n|$$

zu Banach-Räumen werden. Ist eine Dreiecksmatrix A, also eine Transformation (2) gegeben, so bezeichnet

$$c_A = \{ s = \{s_n\} \mid t = As \in c \}$$ das Wirkfeld von A;

ein $s \in c_A$ heißt A-limitierbar, und

$$\lim_A s = \lim As = \lim_{n \to \infty} t_n$$

wird der A-Limes von s genannt.

Die Matrix A heißt konvergenztreu, wenn die konvergenten Folgen A-limitierbar sind $(c \subsetneq c_A)$; gilt überdies noch

(5) $$\lim_A s = \lim s$$

für jedes $s \in c$, so heißt A permanent. Notwendig und hinreichend für Permanenz von A sind die bekannten Toeplitzschen Bedingungen:

(Zn) $$\| A \| := \sup \sum_{k=o}^{n} |a_{nk}| < \infty$$

(Zs_1) $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=o}^{n} a_{nk} = 1$$

(Sp_o) $$\lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0 \quad \text{für } k = 0,1,2, \ldots$$

Wir werden im folgenden auch die Grenzwerte $\pm \infty$ mit einbeziehen: Ist A permanent und gilt die Permanenz-Eigenschaft (5) auch für bestimmt-divergente (reelle) Folgen s, so heißt A total-permanent. Hurwitz [27,Th. I] zeigte, daß eine permanente Dreiecksmatrix genau dann total-permanent ist, wenn

(6) $\qquad a_{nk} \geq 0 \quad$ für alle $\quad n,k \geq k_o$

gilt, d.h. wenn A, abgesehen von endlich vielen Spalten, nicht-negativ ist. (Siehe auch Hurwitz [40].)

Bemerkung (2.1): Ist A eine normale Matrix mit diagonal-positiver Inversen, so ist $A \geq 0$.

Dies sieht man z.B., wenn man $A = (A^{-1})^{-1}$ in eine geometrische Reihe entwickelt (vgl. auch Kuttner [54 , Lemma 2]). Im Fall einer diagonal-positiven Inversen zieht also die Permanenz die totale Permanenz nach sich.

Eine Matrix B heißt stärker als A, wenn $c_B \supseteq c_A$ gilt; wenn zusätzlich die Verträglichkeitseigenschaft

(7) $\qquad \lim_B s = \lim_A s$

für alle $s \in c_A$ erfüllt ist, schreiben wir $B \supseteq A$. Ist (7) auch noch für alle Folgen mit $\lim_A s = \pm \infty$ richtig, so heißt B total-stärker als A, in Zeichen $B \gg A$.

Da man mit zeilenfiniten Matrizen assoziativ rechnen kann, erhält man sofort

Bemerkung (2.2): Ist A normal und B zeilenfinit, so gilt

(i) $c_B \supseteq c_A \iff BA^{-1}$ ist konvergenztreu,

(ii) $B \supseteq A \iff BA^{-1}$ ist permanent,

(iii) $B \gg A \iff BA^{-1}$ ist total-permanent.

A und B heißen äquivalent, in Zeichen $A \sim B$, wenn $B \supseteq A$ und $A \supseteq B$ gleichzeitig gelten; entsprechend ist Total-Äquivalenz erklärt.

Lemma (2.3) (Lorentz - Robinson [54,Th.5], Basu [67]):
Zwei normale permanente Matrizen $A = (a_{nk})$ und $B = (b_{nk})$ sind total-äquivalent genau dann, wenn es eine Folge $\{c_n\}$ gibt mit

$$\lim c_n = 1 \quad \text{und} \quad b_{nk} = c_n a_{nk} \quad (n \geq 0, k \geq k_o).$$

Ist A eine normale Matrix mit diagonal-positiver Inversen, so ist auf Grund von Bemerkung (2.1) $z_n = \sum_k a_{nk} > 0$. Man kann also die Matrix $A^* = \operatorname{diag}\{z_n^{-1}\}A$ bilden. Offenbar hat A^* auch eine diagonal-positive Inverse und ist total-äquivalent zu A; darüber hinaus sind sämtliche Zeilensummen von A^* gleich 1. Bei Vergleichsfragen, die ja nur Eigenschaften der Äquivalenzklassen betreffen, können wir also gegenbenenfalls zu A^* übergehen.

Viele der bekannten Vergleichssätze (siehe etwa Jurkat - Peyerimhoff [52, 65] und Russell [58,70]) fordern, um die Konvergenztreue von BA^{-1} nachzuweisen, daß A abschnittsbeschränkt ist, d.h. daß die Bedingung

$$(8) \qquad \sup_{m,n\geq 0} \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} s_k \right| < \infty \quad \text{für alle } s \in c_A$$

erfüllt ist. Zeller [63, Satz 2] stellte den genauen Zusammenhang dieser Bedingung (8) mit dem von uns betrachteten Matrizen-Typ klar:

Lemma (2.4) (Zeller [63]): A sei normal.

Genau dann, wenn A^{-1} diagonal-positiv ist, gilt $A \geq 0$ und

$$(9) \qquad \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} s_k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{m} a_{nk} \alpha_k \right) \sup_{0\leq\mu\leq m} |t_\mu| \quad (m,n \geq 0; s_k \text{ beliebig}).$$

Dabei ist $\alpha_k = \sum_j \alpha_{kj}$ die k-te Zeilensumme von A^{-1}, und $t = As$.

Wenn A^{-1} diagonal-positiv ist, hat man also insbesondere

$$(10) \qquad \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \alpha_k \geq 0 \quad (m,n \geq 0),$$

und außerdem $\sum_{k=0}^{m} a_{nk} \alpha_k \leq \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \alpha_k = 1$, wenn $\alpha_k \geq 0$ ist.

Als Folgerung ergibt sich sofort

Lemma (2.5): A sei normal und permanent, A^{-1} diagonal-positiv. Dann gilt

$$(11) \qquad \left| \sum_{k=0}^{m} a_{nk} s_k \right| \leq \Omega \sup_{0\leq\mu\leq m} |t_\mu| \quad (m,n \geq 0;\ s_k \text{ beliebig})$$

mit geeignetem, von m und n unabhängigem Ω .

Folglich ist A abschnittsbeschränkt.

Sind für eine normale permanente Matrix A die Ungleichungen (8) oder (11) erfüllt (sie sind für solche Matrizen A äquivalent), so bilden die Folgen

(12) $e = \{1,1, \dots\}$ und $e^k = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$

eine Basis für das als BK-Raum aufgefaßte Wirkfeld $(c_A, \| \|_A)$.

Dies hat folgende Konsequenz (siehe z.B. Wilansky [49, Th.3.3.1], Wilansky - Zeller [56, Th.3]):

Lemma (2.6): Die normale permanente Matrix A sei abschnittsbeschränkt ; es sei $B = CA$ mit einer Dreiecksmatrix C, die $\| C \| < \infty$ (Bedingung (Z_n)) erfüllt.
Behauptung: Aus $Be^k \in c_o$ folgt $Bs \in c_o$ für alle s mit $As \in c_o$.

3. Vergleichssätze für normale Matrizen mit diagonal-positiver Inversen.

Wir stellen Bedingungen dafür auf, daß eine permanente Dreiecksmatrix $B = (b_{nk})$ stärker ist als A. Eine Zusammenfassung von Bemerkung (2.2) und Lemma (2.4)-(2.6) ergibt

Lemma (3.1): A sei eine normale permanente Matrix mit diagonal-positiver Inversen. B sei eine permanente Dreiecksmatrix.
Behauptung: $B \geq A$, wenn $C = BA^{-1}$ die Bedingung (Zn) erfüllt.

Beweis: Gilt $\| C \| < \infty$, so erfüllt C nach Lemma (2.6) die Bedingungen (Sp_0). O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß die Zeilensummen von A, und damit auch die Zeilensummen von A^{-1}, den Wert 1 haben. So erhalten wir für die Zeilensummen von C

$$(13) \quad \sum_{k=0}^{n} c_{nk} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{v=0}^{k} b_{nv} \alpha_{vk} = \sum_{v=0}^{n} b_{nv} \sum_{k=0}^{v} \alpha_{vk} = \sum_{v=0}^{n} b_{nv} \longrightarrow 1,$$

da B permanent ist. Also ist C permanent.

Es kommt also bei der Fragestellung dieses Paragraphen im wesentlichen nur auf $\| C \| < \infty$ an. Aus der Bedingung (Zs_1) erhält man Aussagen für (Zn), wenn Kenntnisse über die Vorzeichenverteilung in der Matrix C vorliegen. Die wichtigsten Fälle sind (i) $C \geq 0$ und (ii) C diagonal-positiv. Diese Fälle ergeben sich, wenn B aus A hervorgeht durch Betonung der diagonal-fernen bzw. der

diagonal-nahen Matrixelemente.

Lemma (3.2): A sei eine normale Matrix mit diagonal-positiver Inversen. Für $B = (b_{nk})$ gelte $b_{nk} = d_{nk}a_{nk}$.

Behauptung: (i) Gilt $0 \leq d_{nn} \leq d_{n,n-1} \leq \ldots \leq d_{no}$ für $n \geq 0$,

so ist $C = BA^{-1} \geq 0$.

(ii) Gilt $0 < d_{nn}$ und $d_{nn} \geq d_{n,n-1} \geq \ldots \geq d_{no}$ für $n \geq 0$,

so ist $C = BA^{-1}$ diagonal-positiv.

Beweis: Es ist $c_{nn} = b_{nn}/a_{nn} = d_{nn}$ und

für $n > k$

$$c_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} d_{n\nu}a_{n\nu}\alpha_{\nu k}$$

$$= \sum_{\nu=k}^{n-1}(d_{n\nu} - d_{n,\nu+1})\sum_{\mu=k}^{\nu} a_{n\mu}\alpha_{\mu k} \quad (14)$$

Die Monotonie der $d_{n\nu}$ zusammen mit

$$\sum_{\mu=k}^{\nu} a_{n\mu}\alpha_{\mu k} \geq \sum_{\mu=k}^{n} a_{n\mu}\alpha_{\mu k} = 0 \quad (k \leq \nu \leq n, k < n)$$

ergibt die Behauptungen.

Diese Überlegungen lassen sich zusammenfassen in

Satz 1: A sei eine normale permanente Matrix mit diagonal-positiver Inversen. B sei permenent und erfülle $b_{nk} = d_{nk}a_{nk}$ mit

$$0 \leq d_{nn} \leq d_{n,n-1} \leq \ldots \leq d_{no} \quad (n \geq 0). \quad (15)$$

Behauptung: $B \gg A$.

Im Fall (ii), C diagonal-positiv, erhält man sogar die Konvergenz-

gleichheit von C, d.h. C ist äquivalent zur Einheitsmatrix I:

Satz 2: A sei eine normale permanente Matrix mit diagonal-positiver Inversen. B sei permanent und erfülle $b_{nk} = d_{nk}a_{nk}$ mit

(16) $0 < d_{nn} = O(1)$ für $n \to \infty$ und $d_{nn} \geq d_{n,n-1} \geq \ldots \geq d_{no}$ $(n \geq 0)$.

Behauptung: $B \sim A$ und $A \gg B$.

Beweis: Lemma (3.2)(ii) und Lemma (3.1) ergeben die Permanenz von $C = BA^{-1}$, so daß $B = A$ gilt. Da C diagonal-positiv ist, folgt $C^{-1} \geq 0$. Entsprechend den Überlegungen zu Lemma (3.1), diesmal mit C^{-1} anstelle von C, erhält man $\| C^{-1} \| < \infty$. Folglich ist jede C-limitierbare Folge s wegen $\| s \|_\infty = \| C^{-1}(Cs) \|_\infty \leq \| C^{-1} \| \| Cs \|_\infty < \infty$ beschränkt. Nach dem Satz von Mazur-Orlicz ist daher $C \sim I$. Die Bemerkung (2.2) zeigt überdies, daß C^{-1} permanent und wegen $C^{-1} \geq 0$ total-permanent ist. Dies ergibt die Behauptung..

Wenn wir in Satz 2 die Voraussetzung $d_{nn} = O(1)$ fallen lassen, kann die Behauptung $B \sim A$ nicht mehr aufrechterhalten werden. Doch die Total-Permanenz von C^{-1} läßt sich weiterhin folgern, wenn man $B \geq 0$ voraussetzt.

Satz 3: A sei eine normale permanente Matrix mit diagonal-positiver Inversen. B sei permanent und erfülle $b_{nk} = d_{nk}a_{nk}$ mit

(17) $d_{nn} > 0$ und $d_{nn} \geq d_{n,n-1} \geq \ldots \geq d_{no} \geq 0$ $(n \geq 0)$.

Behauptung: $A \gg B$.

Beweis: O.B.d.A. kann man annehmen, daß die Zeilensummen von A und von B (und damit auch die von $C = BA^{-1}$ und C^{-1}) alle den Wert 1 haben. (Gegebenenfalls hat man mit Diagonal-Matrizen, deren Diagonalelemente positiv sind und gegen 1 konvergieren, zu multiplizieren; die entstehenden Matrizen A^* und B^* stehen wieder in einer Beziehung, wie sie für A und B verlangt ist.) Aus $C^{-1} \geq 0$ folgt nun $\| C^{-1} \| = 1$. Die Spaltenbedingung (Sp_o) für $C^{-1} = (\gamma_{nk})$ ergibt sich aus

$$0 \leq \gamma_{nk} b_{kk} \leq \sum_{v=k}^{n} \gamma_{nv} b_{vk} = a_{nk} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty ; k \text{ fest}).$$

Also ist C^{-1} total-permanent.

Da für die Total-Permanenz der Matrix C nicht notwendig $C \geq 0$ sein muß, sondern nur $c_{nk} \geq 0$ für alle genügend großen k gefordert wird, lassen sich die Voraussetzungen über die Faktorfolgen d_{nk} in den Sätzen 1 bis 3 entsprechend abschwächen, indem man die Monotonie nur für $n,k \geq k_o$ verlangt. Genau wie Lemma (3.2) erhält man

Lemma (3.2'): A sei eine normale Matrix mit diagonal-positiver Inversen. Für $B = (b_{nk})$ gelte $b_{nk} = d_{nk} a_{nk}$.

Behauptung: (i) Gilt $0 \leq d_{nn} \leq d_{n,n-1} \leq \ldots \leq d_{nk_o}$ für $n \geq k_o$, so ist in $C = BA^{-1}$ stets $c_{nk} \geq 0$ für $n,k \geq k_o$.

(ii) Gilt $0 < d_{nn}$ und $d_{nn} \geq d_{n,n-1} \geq \ldots \geq d_{nk}$ für $n \geq k_o$, so ist $c_{nn} > 0$ $(n \geq k_o)$ und $c_{nk} \leq 0$ $(n > k \geq k_o)$.

Man erhält hieraus Verschärfungen der Sätze 1 bis 3:

Satz 1': A sei eine normale permanente Matrix mit diagonal-positiver Inversen. B sei permanent und erfülle $b_{nk} = d_{nk}a_{nk}$ mit

$$0 \leq d_{nn} \leq d_{n,n-1} \leq \ldots \leq d_{nk_o} \qquad (n \geq k_o) \quad \text{und}$$

(18) $$d_{nk_o}a_{nk} = o(1) \quad \text{für } n\to\infty \quad (k = 0,1,2,\ldots,k_o-1).$$

Behauptung: $B \gg A$.

Beweis: Wir definieren eine Matrix $B^* = (b^*_{nk})$ mittels

$$b^*_{nk} = b_{nk} \quad \text{für } k \geq k_o \text{ und } b^*_{nk} = d_{nk_o}a_{nk} \quad \text{für } k < k_o \quad (n \geq 0).$$

Dann sind die Voraussetzungen von Satz 1 für A und B^* (anstelle von B) erfüllt, wenn man noch (anstelle der d_{nk}) die Faktoren

$$d^*_{nk} = d_{nk} \ (k \geq k_o) \quad \text{und} \quad d^*_{nk} = d_{nk_o} \quad (0 \leq k \leq k_o)$$

einsetzt. Also gilt $B^* \gg A$. Außerdem sind B und B^* total-äquivalent; denn für $t = Bs$ und $t^* = B^*s$ hat man auf Grund von (18)

$$|t_n - t^*_n| \leq \sum_{k=0}^{k_o-1} |b_{nk} - d_{nk_o}a_{nk}|\,|s_k| = o(1) \quad \text{für } n\to\infty .$$

Ein entsprechendes Vorgehen führt zu einer Abschwächung der Voraussetzungen in Satz 3. Hier sind jedoch keine zusätzlichen Bedingungen wie (18) erforderlich.

Satz 3': A sei eine normale permanente Matrix mit diagonal-positiver Inversen. B sei permanent und erfülle $b_{nk} = d_{nk}a_{nk}$ mit

(19) $$d_{nn} > 0 \text{ und } d_{nn} \geq d_{n,n-1} \geq \ldots d_{nk_o} \geq 0 \quad \text{für } n \geq k_o.$$

Behauptung: $A \gg B$.

Beweis: Wir definieren eine Matrix $B^* = (b^*_{nk})$ mittels $b^*_{nk} = d^*_{nk} a_{nk}$, wobei $d^*_{nk} = d_{nk}$ für $k \geq k_o$ und $d^*_{nk} = \delta_{nk}$ für $k < k_o$ $(n \geq 0)$ gesetzt wird. Auf A und B^* (anstelle von B) kann Satz 3 angewendet werden, der $A \gg B^*$ liefert. Außerdem sind die Matrizen B und B^* total-äquivalent, da $(B-B^*)s$ für jede Folge s eine Nullfolge ist.

Bemerkung (3.3): Wird in Satz 3' zusätzlich $d_{nn} = O(1)$ für $n \to \infty$ vorausgesetzt, so gilt $B \sim A$.

Denn nun erfüllen A und B^* die Voraussetzungen von Satz 2; wir haben $B^* \sim A$ und somit auch $B \sim A$.

Wählt man in den aufgestellten Sätzen in geeigneter Weise für A oder B konvergenzgleiche Matrizen, so ergeben sich Mercer-Sätze, wie sie auch schon von Agnew [32] bewiesen wurden. Beispielsweise gewinnt man, indem man in Satz 2 für B die Einheitsmatrix I und $A = T^{-1}$ setzt, die Aussage (vgl. Agnew [32,Th.4.1]):

Eine normale permanente Matrix T, die selbst diagonal-positiv ist, ist konvergenzgleich. - Auch folgende Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Mercer läßt sich aus Satz 3 gewinnen (vgl. Beekmann [67,S.154]):

Folgerung (3.4): Es sei A eine normale permanente Matrix mit diagonal-positiver Inversen.

Behauptung: Für $\alpha > 0$ ist $B_\alpha = \alpha I + (1-\alpha)A$ konvergenzgleich.

Beweis: Wir betrachten den Fall $0 < \alpha \leq 1$. (Im anderen Fall $\alpha > 1$ ist die Matrix $\alpha I+(1-\alpha)A$ nach endlich vielen Änderungen selbst diagonal-positiv, nach der obigen Bemerkung also konvergenzgleich.) Wir setzen in Satz 3 für B die Matrix $\alpha I+(1-\alpha)A$ ein; die Voraussetzungen des Satzes sind mit $d_{nn} = \alpha/a_{nn} + 1-\alpha$ und $d_{nk} = 1-\alpha$ für $n > k$ erfüllt; also gilt $A \gg B_\alpha$. Insbesondere ist daher jede B_α-limitierbare Folge auch $(B_\alpha A)$-limitierbar, d.h. konvergent.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einer Bemerkung, welche die Sätze 1 und 1' ergänzt.

Bemerkung (3.5) (Agnew[32],Th.3.2):
Wird in Satz 1 oder in Satz 1' zusätzlich $d_{nn} > \theta > \frac{1}{2}$ für fast alle n vorausgesetzt, so gilt $B \sim A$.

Denn $C = BA^{-1}$ erfüllt $c_{nn} = d_{nn} > \theta > \frac{1}{2}$ für fast alle n und hat fast nur nicht-negative Spalten; C genügt damit den Voraussetzungen des Satzes von Agnew und ist konvergenzgleich.

4. Bewichtete Mittel

Wir betrachten zu gegebener Folge $p = \{p_n\}$ mit $p_n > 0 \quad (n \geq 0)$ die Matrix $M_p = (M, p_n)$ der bewichteten Mittelbildung, welche die Transformation

$$t_n = P_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \qquad \text{mit } P_n = p_0 + \ldots + p_n$$

definiert. Die genaue Permanenzbedingung für M_p ist $\sum p_n = \infty$. Die Inverse M_p^{-1}, deren Glieder man aus der Umkehrtransformation

$$s_n = -p_n^{-1} P_{n-1} t_{n-1} + p_n^{-1} P_n t_n$$

abliest, ist offenbar diagonal-positiv, so daß man die Sätze von §3 anwenden kann. Darüber hinaus ist M_p^{-1} eine Bandmatrix von der Breite 2, bei der also nur die Hauptdiagonale und die erste Nebendiagonale durch Nicht-Nullen besetzt sind. In diesem Fall lassen sich die Aussagen der Sätze noch etwas schärfer fassen. Ausschlaggebend ist dabei eine Modifikation von Lemma (3.2) bzw. (3.2'):

Lemma (4.1): A sei eine normale Matrix mit $a_{nk} \neq 0$ für $n \geq k$. A^{-1} sei eine diagonal-positive Bandmatrix der Breite 2. Für B gelte $b_{nk} = d_{nk} a_{nk}$, und es sei $C = BA^{-1}$.

Behauptung: (i) Dann und nur dann gilt $c_{nk} \geq 0$ für $n, k \geq k_o$, wenn $0 \leq d_{nn} \leq d_{n,n-1} \leq \ldots \leq d_{nk_o}$ für $n \geq k_o$ ist.

(ii) Dann und nur dann gilt $c_{nn} > 0$ $(n \geq k_o)$ und $c_{nk} \leq 0$ $(n > k \geq k_o)$, wenn $0 < d_{nn}$ und $d_{nn} \geq d_{n,n-1} \geq \ldots \geq d_{nk_o}$ für $n \geq k_o$ ist.

Beweis: Ist $A^{-1} = (\alpha_{nk})$ eine Bandmatrix der Breite 2, so gilt

$$\sum_{\mu=k}^{\nu} a_{n\mu}\alpha_{\mu k} = \sum_{\mu=k}^{n} a_{n\mu}\alpha_{\mu k} = 0 \text{ für } n \geq \nu > k.$$

Damit erhält man aus (14)

$$c_{nk} = (d_{nk} - d_{n,k+1})a_{nk}\alpha_{kk} \qquad \text{für } n > k.$$

Zusammen mit $c_{nn} = d_{nn}$ ergibt sich hieraus die Behauptung, da a_{nk} für $n \geq k$ und α_{kk} positiv sind.

Für die bewichteten Mittel ergibt sich daher,

<u>Satz 4</u>: Es sei $p_n > 0$ $(n \geq 0)$ und $P_n = p_0+\ldots+p_n \to \infty$ für $n\to\infty$; $B = (b_{nk})$ sei eine permanente Dreiecksmatrix.

Behauptung: Dann und nur dann gilt $B \gg (M,p_n)$, wenn für geeignetes $k_0 \geq 0$ die Beziehung

(20) $$0 \leq \frac{b_{nn}}{p_n} \leq \frac{b_{n,n-1}}{p_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{b_{nk_0}}{p_{k_0}} \qquad \text{für } n \geq k_0$$

erfüllt ist.

Beweis: Wir wenden Satz 1' an auf $A = (M,p_n)$ und B. Es ist

$$d_{nk} = P_n \frac{b_{nk}}{p_k}, \quad \text{und} \quad d_{nk_0}a_{nk} = b_{nk_0}p_k/p_{k_0} = o(1) \quad \text{für } n\to\infty.$$

Nach Satz 1' ist die Bedingung (20) hinreichend für $B \gg (M,p_n)$.

Nach Lemma (4.1)(i) ist sie auch notwendig.

Für die spezielle Wahl $B = (M, q_n)$ erhält man aus diesem Satz

Folgerung (4.2) (Lorch [54]):

Es sei $p_n > 0$ $(n \geq 0)$ und $P_n = p_0 + \ldots + p_n \to \infty$ für $n \to \infty$;
$q_n > 0$ $(n \geq 0)$ und $Q_n = q_0 + \ldots + q_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Behauptung: Es gilt $(M, q_n) \gg (M, p_n)$ genau dann, wenn

$$\frac{q_k}{p_k} \leq \frac{q_{k-1}}{p_{k-1}} \qquad \text{für fast alle } k \tag{21}$$

erfüllt ist.

Als weitere Folgerung ist hieraus sofort abzulesen

Folgerung (4.3) (Kuttner - Rhoades [68], Th.3):

Es sei $p_n > 0$ $(n \geq 0)$ und $P_n = p_0 + \ldots + p_n \to \infty$ für $n \to \infty$,
$q_n > 0$ $(n \geq 0)$ und $Q_n = q_0 + \ldots + q_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Behauptung: (M, p_n) und (M, q_n) sind total-äquivalent dann und nur dann, wenn für geeignetes c und fast alle n

$$p_n = c\, q_n$$

gilt.

Als weiteren Spezialfall wählen wir in Satz 4 für B eine Nörlund-Matrix $N_q = (N, q_n)$; sie ist für Folgen $q = \{q_n\}$ mit $Q_n = q_0 + \ldots + q_n \neq 0$ definiert durch die Transformation

$$t_n = Q_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} q_{n-k} s_k .$$

Ist $q_n \geq 0$ für $n \geq 0$, so ist N_q permanent genau dann, wenn $q_n = o(Q_n)$ für $n \to \infty$ gilt. Satz 4 liefert in diesem Fall

Folgerung (4.4) (Kuttner - Rhoades [68], Lemma 1):

Es sei $p_n > 0$ $(n \geq 0)$ und $P_n = p_0 + \ldots + p_n \to \infty$ für $n \to \infty$,

$q_n > 0$ $(n \geq 0)$ und $q_n = o(Q_n)$ für $n \to \infty$, $Q_n = q_0 + \ldots + q_n$.

Behauptung: Es gilt $(N, q_n) \gg (M, p_n)$ genau dann, wenn

$$(22) \qquad \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \sup_{n \geq 0} \frac{q_n}{q_{n+1}} \qquad \text{für } k \geq k_0$$

erfüllt ist.

Beweis: In Satz 4 setzen wir $A = (M, p_n)$ und $B = (N, q_n)$, also

$$a_{nk} = p_k / P_n \quad \text{und} \quad b_{nk} = q_{n-k} / Q_n \qquad (n \geq k \geq 0);$$

die Bedingung (20) des Satzes besagt

$$0 \leq \frac{q_0}{p_n} \leq \frac{q_1}{p_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{q_{n-k_0}}{p_{k_0}} \qquad (n \geq k_0).$$

Dies ist äquivalent mit (22).

Wir nennen noch einige spezielle Aussagen, die sich unmittelbar aus den Folgerungen (4.2) bis (4.4) ergeben. Dabei ist C_1 die Cesårosche Matrix der arithmetischen Mittelbildung:

$$C_1 = (M,e_n) = (N,e_n) \quad \text{mit } e_n = 1 \quad (n \geq 0).$$

Folgerung (4.5) (siehe etwa Kuttner - Rhoades [68]):

Es sei $p_n > 0$, $P_n = p_0 + \dots + p_n \to \infty$;
$q_n > 0$, $Q_n = q_0 + \dots + q_n$, $q_n = o(Q_n)$.

Behauptung: (i) $C_1 \gg (M,p_n) \iff p_n \leq p_{n+1}$ für $n \geq k_0$,

(ii) $(N,q_n) \gg C_1 \iff q_n \leq q_{n+1}$ für $n \geq 0$.

Ist außerdem $p_n = o(P_n)$ für $n \to \infty$ erfüllt, so gilt

(iii) $(N,p_n) \gg (M,p_n) \iff p_n \leq p_{n+1}$ für $n \geq 0$
$\iff (N,p_n) \gg C_1 \gg (M,p_n)$;

(iv) (N,p_n) und (M,p_n) sind genau dann total-äquivalent wenn $p_n = \text{const.}$ für $n \geq 0$.

(v) $p_n \geq p_{n+1}$ für $n \geq 0 \implies (M,p_n) \gg C_1 \gg (N,p_n)$.

Im Fall (iv) folgt nämlich aus der Total-Äquivalenz von (N,p_n) und (M,p_n), daß C_1 und (N,p_n) total-äquivalent sind. Nach einem Satz von Debi [55,Th.3] ist dies aber nur möglich, wenn die Matrizen identisch sind. Die letzte Aussage in (v), $C_1 \gg (N,p_n)$, folgert man am einfachsten aus Satz 3 oder 3'. In der Spezialisierung $A = (M,p_n)$ hat letzterer die Gestalt

Satz 5:

Es sei $p_n > 0$, $P_n = p_0 + \dots + p_n \to \infty$; $B = (b_{nk})$ sei eine permanente Dreiecks-Matrix mit der Eigenschaft

(23) $\quad b_{nn} > 0$ und $\dfrac{b_{nn}}{p_n} \geq \dfrac{b_{n,n-1}}{p_{n-1}} \geq \dots \geq \dfrac{b_{nk_0}}{p_{k_0}} \qquad (n \geq k_0)$

Behauptung: $(M,p_n) \gg B$.

Zusatz: Gilt außer (23) noch $b_{nn} = O(p_n)$ $(n \to \infty)$, so sind (M,p_n) und B äquivalent.

Übrigens ist die Monotonie-Eigenschaft (23) keineswegs eine notwendige Bedingung für $(M,p_n) \gg B$, auch dann nicht, wenn etwa B eine diagonal-positive Inverse hat. Zum Beispiel gilt für $(M,p_n) = C_1$ und für $B = (N,q_n)$ mit

$$q_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-2)^{-\nu}$$

die Inklusion $C_1 \gg (N,q_n)$, ohne daß $q_n \leq q_{n+1}$ erfüllt wäre; vgl. auch Folgerung (4.6)(v). (Mit $q(z) = \sum q_n z^n = \left[(1-z)(1+\frac{z}{2})\right]^{-1}$ ergibt sich für $N_q^{-1} = (\beta_{nk})$ die Darstellung $\beta_{nk} = r_{n-k}Q_k$ mit $r_0 = 1$, $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$ und $r_n = 0$ für $n \neq 0,1,2$; die Matrix $C_1 N_q^{-1}$ ist eine nicht-negative Bandmatrix der Breite 3 mit Zeilensumme 1; sie ist also total-permanent.)

Dieses Beispiel zeigt auch, daß Lemma (4.1) nicht richtig bleibt, wenn für A^{-1} Bandmatrizen von größerer Breite zugelassen werden.

5. Nörlund-Verfahren

Hardy [49,Th.23] stellte einen Vergleichssatz für eine Klasse von Nörlund - Matrizen auf, die (mit unserer Bezeichnung) eine diagonal-positive Inverse besitzen (Hardy [49,Th.22]). Wir bezeichnen hier diese Klasse mit $\mathcal{N}$.

Definition (5.1): $\mathcal{N}$ sei die Klasse derjenigen Nörlund - Matrizen (N,p_n) mit $p_n > 0$ $(n \geq 0)$, welche die Eigenschaft

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} \qquad \text{für } n \geq 0 \tag{24}$$

besitzen.

Insbesondere gehören die Cesàro - Matrizen C_α, die durch $p_n = \binom{n+\alpha-1}{n}$ erzeugten Nörlund - Matrizen, für die Werte $0 < \alpha \leq 1$ zu dieser Klasse.

Die Klasse $\mathcal{N}$, die in vielen Vergleichssätzen über Nörlund - Verfahren eine Rolle spielt, wurde im Zusammenhang mit Fragen des Total-Vergleichs von Rhoades [67,70] betrachtet. Da sein Satz (Rhoades [67,Th.2]) eine kleine Ungenauigkeit enthält,(auf die er in Rhoades [70] selbst hinweist), geben wir hier eine endgültige Fassung, vgl. auch Hardy [49,Th.23]:

Satz 6: (N,p_n) sei eine permanente Matrix aus der Klasse $\mathcal{N}$; (N,q_n) sei permanent und erfülle $q_n \geq 0$ und

(25) $$\frac{q_k}{p_k} \leq \frac{q_{k+1}}{p_{k+1}} \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Behauptung: $(N,q_n) \gg (N,p_n)$.

Beweis: $(N,p_n)^{-1}$ ist diagonal-positiv. Setzt man in Satz 1 nun $A = (N,p_n)$, $B = (N,q_n)$, also $a_{nk} = P_n^{-1} p_{n-k}$ und $b_{nk} = Q_n^{-1} q_{n-k}$, so erhält man

$$d_{nk} = \frac{P_n}{Q_n} \frac{q_{n-k}}{p_{n-k}} \geq \frac{P_n}{Q_n} \frac{q_{n-k-1}}{p_{n-k-1}} = d_{n,k+1} \geq 0.$$

Auch einige Spezialfälle wurden von Debi [55] und Rhoades [67,70] behandelt: $(N,p_n) = C_1$ (vgl. auch die Folgerung (4.5) (ii)), $(N,p_n) = C_\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, $(N,p_n) = (R^*,n,\alpha)$ (unstetiges Riesz-Verfahren) und $(N,q_n) = C_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. Für die Matrizen C_α mit $\alpha > 1$, die teilweise von Hill [45] ($0 < \alpha$ ganz) und Rhoades [67,Th.1] $(1 < \alpha < 2)$ behandelt wurden, läßt sich die entwickelte Methode ebenfalls nutzbar machen.

Bevor wir diese Frage aufgreifen, schicken wir eine Überlegung voraus, die einen Satz von Debi [55, Th. 1] leicht modifiziert.

Lemma (5.2): (N,p_n) und (N,q_n) seien permanente Nörlund-Matrizen. Es sei $p_n \geq 0$ für $n = 0,1,\ldots$.

Behauptung: Es ist $(N,q_n) \gg (N,p_n)$ dann und nur dann, wenn $C = (N,q_n)(N,p_n)^{-1}$ nicht-negative Elemente besitzt.

Beweis: Aus $(N,q_n) \gg (N,p_n)$ folgt die Total-Permanenz von (N,q_n), da wegen $p_n \geq 0$ die Matrix (N,p_n) total-permanent ist; insbesondere folgt: $q_n \neq 0$ für alle $n \geq 0$ (siehe (6)). Ferner folgt nach Debi [55, Th. 1], daß für $C = (c_{nv})$ die Darstellung $c_{nv} = k_{n-v} P_v / Q_n$ mit nicht-negativen k_v möglich ist, also ist $c_{nv} \geq 0$. Umgekehrt folgt aus $c_{nv} \geq 0$ sofort $\| C \| = 1$, da alle Zeilensummen von C den Wert 1 haben. Aus $(N,q_n) = C \cdot (N,p_n)$ folgt ferner

$$q_{n-v}/Q_n = \sum_{\mu=v}^{n} c_{n\mu} p_{\mu-v}/P_\mu \geq c_{nv}\, p_0/P_v .$$

Es ist also $c_{nv} = \mathcal{O}(q_{n-v}/Q_n) = o(1)$ für $n \to \infty$, da (N,q_n) permanent vorausgesetzt ist. Es folgt die Totalpermanenz von C, und damit $(N,q_n) \gg (N,p_n)$.

Wir wenden uns nun der Behandlung der C_α-Matrizen für $\alpha > 0$ zu. Dabei treten die rückwärtsgenommenen Differenzen der Folge $\{q_n\}$

auf; sie sind für natürliches k rekursiv durch

$$\nabla^0 q_n = q_n, \quad \nabla^k q_n = \nabla^{k-1} q_n - \nabla^{k-1} q_{n-1} \qquad (k \geq 1)$$

definiert, dabei ist gegebenenfalls $q_{-\nu} = 0$ $(\nu = 1,2,\ldots)$ zu setzen. Man erhält leicht die expliziten Darstellungen

$$\nabla^k q_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} q_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} q_\nu$$

mit

$$\binom{\lambda}{m} = \begin{cases} 0 & \text{für } m = -1,-2,\ldots \\ 1 & \text{für } m = 0 \\ \dfrac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)}{m!} & \text{für } m = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Diese Darstellungen kann man zur Definition von (rückwärts genommenen) Differenzen nicht-natürlicher Ordnungen k verwenden.

Satz 7: Es sei $\alpha \geq 0$ und (N,q_n) eine permanente Nörlund-Matrix.

Behauptung: $(N,q_n) \gg C_\alpha \iff \nabla^\alpha q_n \geq 0$ für $n = 0,1,2,\ldots$.

Beweis: Wir setzen $Z_q = (q_{n-k})_{n,k=0,1,\ldots}$ mit $q_{-\nu} = 0$ $(\nu \geq 1)$

und $\Sigma^\alpha = \left(\binom{n-k+\alpha-1}{n-k} \right)_{n,k=0,1,2,\ldots}$;

Damit wird $(N,q_n) = \operatorname{diag}\{Q_n^{-1}\} Z_q$ und $C_\alpha = \operatorname{diag}\{\binom{n+\alpha}{n}^{-1}\}\Sigma^\alpha$

Da $\Sigma^{-\alpha}$ die Inverse zu Σ^α ist, erhält man

(26) $$C = (N,q_n) C_\alpha^{-1} = \operatorname{diag}\{Q_n^{-1}\} Z_q \Sigma^{-\alpha} \operatorname{diag}\{\binom{n+\alpha}{n}\} .$$

Aus $(N,q_n) \gg C_\alpha$ folgt wie beim Beweis von Lemma (5.2), daß $q_n \geq 0$ (und daher $Q_n > 0$) und daß C nicht-negative Elemente c_{nk} besitzt.

Da $\binom{n+\alpha}{n} > 0$ für $\alpha \geq 0$, folgt also, daß die Matrix $Z_q \Sigma^{-\alpha} = (\nabla^\alpha q_{n-k})_{n,k}$ nicht-negative Elemente hat.

Ist umgekehrt $\nabla^{\alpha} q_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$ vorausgesetzt, so daß also die Matrix $Z_q \Sigma^{-\alpha}$ nicht-negative Elemente hat, dann hat auch $(Z_q \Sigma^{-\alpha}) \Sigma^{\alpha} = Z_q$ nicht-negative Elemente, d.h. $q_n \geq 0$ $(n \geq 0)$. Folglich ist $Q_n > 0$, und die Matrix C hat nicht-negative Elemente, wie man aus (26) ersieht. - Die Bedingung $\nabla^{\alpha} q_n \geq 0 (n \geq 0)$ ist also notwendig und hinreichend für $c_{nk} \geq 0$ $(n,k \geq 0)$; aus Lemma (5.2) folgt damit die Behauptung des Satzes.

Da die Differenzen gebrochener Ordnung vielfach nicht so leicht in die Hand zu bekommen sind wie die Differenzen natürlicher Ordnungen, geben wir noch ein hinreichendes Kriterium für die Inklusion $(N,q_n) \gg C_{\alpha}$ an, das nur die Differenzen der Ordnung $k = [\alpha]$ verwendet. Das Kriterium verallgemeinert einen Satz von Rhoades [67, Th.1 und Cor.3] .

Folgerung (5.3): Es sei $\alpha = a + \delta$ $(0 \leq a$ ganz, $0 < \delta \leq 1)$. (N,q_n) sei eine permanente Nörlund-Matrix mit

$$\nabla^{a} q_n \geq 0 \quad \text{für } n = 0,1,2,\ldots \quad \text{und}$$

$$\nabla^{a} q_{n+1} \geq \frac{n+\delta}{n+1} \nabla^{a} q_n \quad \text{für } n = 0,1,2,\ldots . \tag{27}$$

Behauptung: $(N,q_n) \gg C_{\alpha}$.

Wir benutzen die Bezeichnungen des Beweises von Satz 7.

Somit ergibt sich für die Matrix mit den Elementen $\nabla^{\alpha} q_{n-k}$:

$$(\nabla^{\alpha} q_{n-k})_{n,k} = \omega_q \Sigma^{-\alpha} = Z_q \Sigma^{-a-\delta} = (Z_q \Sigma^{-a})\Sigma^{-\delta}$$

Wir wenden nun Lemma (3.2) an mit $A = \Sigma^{\delta}$ und $B = Z_q \Sigma^{-a} = (\nabla^{a} q_{n-k})_{n,}$

A besitzt die diagonal-positive Inverse $\Sigma^{-\delta}$, und in der

Beziehung $\nabla^{a} q_{n-k} = d_{nk} \binom{n-k+\delta-1}{n-k}$ erfüllen die d_{nk} die

verlangten Ungleichungen: $0 \leq d_{nn}$ und $d_{nk} \leq d_{n,k-1}$ $(1 \leq k \leq n)$;

die letzteren sind nämlich gleichbedeutend mit (27).

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Vergleichssatz, den man durch Anwendung von Satz 3 auf Nörlund - Matrizen erhält. Dabei ist es nun das stärkere Verfahren, das der Klasse $\mathcal{N}$ angehört.

Satz 8: (N,p_n) sei eine permanente Matrix aus der Klasse $\mathcal{N}$.
(N,q_n) sei permanent und erfülle $q_n \geq 0$ $(n \geq 0)$ und

$$\frac{q_k}{p_k} \geq \frac{q_{k+1}}{p_{k+1}} \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Behauptung: $(N,p_n) \gg (N,q_n)$.

Den Beweis führt man wie bei Satz 6; nur wird jetzt Satz 3 angewendet.

Natürlich lässt sich in den Sätzen 6 und 8 die Matrix (N,q_n)

durch eine beliebige permanente Dreiecksmatrix $B = (b_{nk})$ ersetzen,

die den Bedingungen

$$0 \leq \frac{b_{nn}}{p_o} \leq \frac{b_{n,n-1}}{p_1} \leq \ldots \leq \frac{b_{no}}{p_n} \qquad (n \geq 0)$$

bzw. den Bedingungen

$$b_{nn} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{b_{nn}}{p_o} \geq \frac{b_{n,n-1}}{p_1} \geq \ldots \geq \frac{b_{no}}{p_n} \geq 0 \qquad (n \geq 0)$$

genügen.

6. Zwischen - Matrizen.

Die Sätze von §3, insbesondere Satz 1 und Satz 3, geben in manchen Fällen die Möglichkeit zu entscheiden, ob drei permanente normale Matrizen A,B,C in der Relation

$$C \gg A \gg B$$

stehen. Umgekehrt kann man die Sätze zur Konstruktion einer Zwischen-Matrix A verwenden, wenn B und C gegeben sind. Wir wollen diesen Gedanken speziell für Nörlund - Matrizen durchführen und dabei auf einige Fragen von Goffman - Huneke [70,S.8] eingehen. Aus den Sätzen von §5 erhalten wir hinreichende Bedingungen für die Existenz von Zwischen-Verfahren.

Satz 9: (N,p_n) und (N,q_n) seien (total-) permanente Nörlund-Matrizen mit $p_n > 0$ und $q_n > 0$ $(n \geq 0)$.
Es existiere eine Folge $\{\varrho_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit

$$\varrho_n \leq \varrho_{n+1} \quad \text{und} \quad p_n/p_{n-1} \leq \varrho_n \leq q_n/q_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Es werde $\varrho_0 = 1$ und $r_n = \prod_{\nu=0}^{n} \varrho_\nu$ $(n \geq 0)$ gesetzt.

Behauptung: $(N,q_n) \gg (N,r_n) \gg (N,p_n)$.

Beweis: Es ist $r_n > 0$ $(n \geq 0)$ und $r_{n+1}/r_n = \varrho_{n+1} \geq \varrho_n = r_n/r_{n-1}$, die Matrix (N,r_n) gehört also zur Klasse $\mathcal{N}$. Ferner ist

$r_n/q_n \leq r_{n-1}/q_{n-1}$ für $n \geq 1$, denn $r_n/q_n = (r_{n-1}/q_{n-1})(q_{n-1}/q_n)\,\varrho_n$.

Die Permanenz von (N,r_n) folgt nun aus

$$R_n = \sum_{\nu=0}^{n} r_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{r_\nu}{q_\nu} q_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{r_\nu}{q_\nu} - \frac{r_{\nu+1}}{q_{\nu+1}} \right) Q_\nu + \frac{r_n}{q_n} Q_n \geq \frac{r_n}{q_n} Q_n ,$$

wobei $Q_n = q_0 + \ldots + q_n$ gesetzt ist; denn aus dieser Ungleichung ergibt sinh $r_n/R_n \leq q_n/Q_n = o(1)$ für $n \to \infty$, da (N,q_n) als permanent vorausgesetzt ist. Satz 6 liefert nun $(N,q_n) \gg (N,r_n)$. Aus $p_n/p_{n-1} \leq \varrho_n$ folgt $p_n/p_{n-1} \leq r_n/r_{n-1}$ für $n \geq 1$. Da (N,r_n) permanent ist und zur Klasse $\mathcal{N}$ gehört, ergibt Satz 8 sofort $(N,r_n) \gg (N,p_n)$.

Die Konstruktion der Matrix (N,r_n) im ersten Teil des Beweises nimmt keinen unmittelbaren Bezug auf Eigenschaften von (N,p_n); wir können daher formulieren:

<u>Satz 10</u>: (N,q_n) sei eine permanente Nörlund-Matrix mit $q_n > 0 \quad (n \geq 0)$.
Es existiere eine Folge $\{\varrho_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit
$0 < \varrho_n \leq \varrho_{n+1}$ und $\varrho_n \leq q_n/q_{n-1} \quad (n \geq 1)$.
Es werde $\varrho_0 = 1$ und $r_n = \prod_{\nu=0}^{n} \varrho_\nu \quad (n \geq 0)$ gesetzt.

Behauptung: $(N,q_n) \gg (N,r_n) \gg I$.

Anhand einfacher Beispiele läßt sich zeigen, daß die Aussage im Satz 10 falsch wird, wenn man nur

$$\varrho_n \leq q_n/q_{n-1} \quad \text{für alle genügend großen } n$$

voraussetzt. Doch kann unter dieser eingeschränkten Voraussetzung noch auf $(N,q_n) \supseteq (N,r_n)$ geschlossen werden, wie Theorem 23 von Hardy [49, S.69] zeigt. Man erhält so als Konstruktions - verfahren für Zwischen - Matrizen (im Sinne gewöhnlicher Inklusion)

Satz 11: (N,q_n) sei permanent und $q_n > 0$ für $n \geq 0$.

Es existiere eine Folge $\{\varrho_n\}_{n=1,2,\ldots}$ mit $0 < \varrho_n \leq \varrho_{n+1}$ $(n \geq 1)$

und $\varrho_n \leq q_n/q_{n-1}$ für $n > n_o$.

Es werde $\varrho_o = 1$ und $r_n = \prod_{\nu=0}^{n} \varrho_\nu$ $(n \geq 0)$ gesetzt.

Behauptung: $(N,q_n) \supseteq (N,r_n) \supseteq I$.

Zusatz: Ist außerdem eine permanente Nörlund - Matrix (N,p_n) gegeben mit $p_n/p_{n-1} \leq \varrho_n$ für $n > n_o$,

so gilt

$$(N,q_n) \supseteq (N,r_n) \supseteq (N,p_n).$$

Ähnlich wie beim Beweis von Satz 9 zeigt man, daß (N,r_n) in $\mathcal{N}$ liegt und permanent ist. Theorem 23 von Hardy [49,S.69] ergibt

dann die Behauptungen des Satzes und des Zusatzes.

Wir fügen noch ein einfaches Kriterium dafür an, wann in Satz 11 echte Inklusion vorliegt.

Bemerkung (6.1): Es seien (N,p_n) und (N,q_n) permanent und $(N,q_n) \geq (N,p_n)$.

Behauptung: Ist $p_n > 0$ und $P_n = p_0 + \dots + p_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und gilt $q_n/p_n \to \infty$ für $n \to \infty$, so ist (N,q_n) echt stärker als (N,p_n): $(N,q_n) \supset (N,p_n)$.

Beweis: $Q_n/P_n = P_n^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu = P_n^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu (q_\nu/p_\nu) \to \infty$, da nach den Voraussetzungen über p_n die Matrix (M,p_n) total-permanent ist und Q_n/P_n durch Transformation mittels (M,p_n) aus der Folge $\{q_n/p_n\}$ entsteht.

Proposition 3 von Goffman-Huneke [70] ergibt die Behauptung.

Im Spezialfall der Cesàro-Matrizen C_α hat man $p_n = \binom{n+\alpha-1}{n}$, so daß

$$p_n/p_{n-1} = (n+\alpha-1)/n \qquad (n \geq 1) \qquad \text{wird.}$$

Wählt man in diesem Fall $\varrho_n = \varrho_n^\delta = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right)^\delta$ $(n=1,2,\dots;0\leq\delta)$

so kommt man auf $r_n = r_n^\delta = \frac{2}{n+2} \left(\frac{\log 2}{\log(n+2)}\right)^\delta$

und damit auf die von Goffman-Huneke [70, Prop.4,5] betrachteten Matrizen (N,r_n^δ), welche

$$C_\alpha \supset (N,r_n^\delta) \supset (N,r_n^{\delta'}) \supset I$$

für $0 \leq \delta < \delta' \leq 1$ und alle $\alpha > 0$ erfüllen. Offenbar gilt hier auch

$$(N,r_n^\delta) \gg (N,r_n^{\delta'}) \gg I \quad \text{für } 0 \leq \delta < \delta' \leq 1 \qquad \text{(Satz 9);}$$

dagegen besteht nicht für alle $\alpha > 0$ die Beziehung $C_\alpha \gg (N,r_n^\delta)$, vgl. §

Eine andere Wahl von ϱ_n führt zur Beantwortung einer Frage von Goffman - Huneke [70]:

Folgerung (6.2):

Es sei $r_n = r_n^\delta = \binom{n+\beta-1}{n}\left(\frac{\log 2}{\log(n+2)}\right)^\delta \qquad (0 < \delta \leq 1,\ 0 < \beta < 1).$

Behauptung:
$$C_\beta \gg (N, r_n^{\delta'}) \gg (N, r_n^\delta) \gg I$$
und
$$C_\beta \supset (N, r_n^{\delta'}) \supset (N, r_n^\delta) \supset C_\alpha$$
für alle $0 < \delta' < \delta \leq 1$ und alle α mit $0 \leq \alpha < \beta$.

Beweis: $C_\alpha = (N, p_n^\alpha)$ mit $p_n^\alpha = \binom{n+\alpha-1}{n}$ liegt in der Klasse $\mathcal{N}$ für $0 < \alpha \leq 1$. Wir wählen

$$\varrho_n = \varrho_n^\delta = \frac{n+\beta-1}{n}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right)^\delta \qquad (n = 1,2,\ldots;\ 0 < \delta \leq 1),$$

so daß (mit $\varrho_0 = 1$)

$$r_n = r_n^\delta = \prod_{\nu=0}^{n} \varrho_\nu \qquad (n \geq 0)$$

wird. Offenbar ist

$$0 < \varrho_n \leq \varrho_{n+1} \quad \text{und} \quad \varrho_n^\delta < \varrho_n^{\delta'} < \frac{n+\beta-1}{n} \quad \text{für } 0 < \delta' < \delta \leq 1 \text{ und } n \geq 1$$

erfüllt. Aus den Sätzen 9, 10 erhalten wir damit

$$C_\beta \gg (N, r_n^{\delta'}) \gg (N, r_n^\delta) \gg I;$$

Satz 11 und die Bemerkung (6.1) liefert

$$C_\beta \supset (N, r_n^{\delta'}) \supset (N, r_n^\delta) \supseteq I.$$

Ferner gilt für $\alpha < \beta$ und $n > n_0(\alpha)$

$$p_n^\alpha / p_{n-1}^\alpha = (n+\alpha-1)/n \leq \varrho_n^1 ;$$

denn diese Ungleichung ist gleichwertig mit

$$\beta - \alpha \geq (n+\beta-1)\cdot\log(1 + \frac{1}{n+1})/\log(n+2).$$

Da hier die rechte Seite gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$, ist (wegen $\beta - \alpha > 0$) die Ungleichung für alle genügend großen n erfüllt. Der Zusatz von Satz 11 zusammen mit Bemerkung (6.1) liefert nun $(N,r_n^1) \supset C_\alpha$ für alle $\alpha < \beta$, und damit die Behauptung.

Theorem 1 von Goffman - Huneke [70] ergibt unmittelbar die

Folgerung (6.3):	Zu jedem C_β $(\beta > 0)$ gibt es Nörlund-Matrizen (N,p_n) mit der Eigenschaft $C_\beta \supset (N,p_n) \supset C_\alpha$ für alle $\alpha < \beta$.

Wir bringen jetzt noch einige Aussagen negativer Art.- Die generelle Frage, ob es zu zwei gegebenen vergleichbaren (permanenten) Nörlund - Matrizen, etwa $(N,q_n) \supset (N,p_n)$, stets eine Zwischen-Matrix (N,r_n) gibt, so daß $(N,q_n) \supset (N,r_n) \supset (N,p_n)$ gilt, ist sicher zu verneinen. Dies ergibt sich aus der Wirkfeld-Struktur von Nörlund-Matrizen, die vor allem von Peyerimhoff [56] und Miesner [65] untersucht wurde. So ist es etwa möglich, zu gegebem permanenten (N,p_n) ein (N,q_n) zu konstruieren derart, daß das Wirkfeld

von (N,p_n) im Wirkfeld von (N,q_n) die Codimension 1 hat, was echte Zwischen-Matrizen ausschließt. Im einfachsten Fall, wenn $(N,p_n) \supset I$ ist, führt dieses Vorgehen zu den Einfolgen-Verfahren.

Die Total-Inklusion erzeugt eine feinere Ordnung als die gewöhnliche Inklusion; beispielsweise brauchen äquivalente Matrizen nicht total-äquivalent sein, sie sind nicht einmal notwendig total-vergleichbar. Bei Nörlund-Matrizen gilt sogar

Lemma (6.4) (Debi [55,Th.3]):

Zwei permanente Nörlund-Matrizen sind genau dann total-äquivalent, wenn sie identisch sind.

(Ähnliches gilt für Hausdorff-Matrizen, siehe Basu [49,L.2]).

Es stellt sich also erneut die Frage nach der Existenz von Zwischen-Matrizen, nun im Sinne der Total-Inklusion. Im Spezialfall ist dies die Frage nach der Existenz von total-primen Nörlund-Matrizen im Sinne der folgenden

Definiton (6.5):

Eine total-permanente Nörlund-Matrix (N,q_n) heiße total-prim, wenn aus $(N,q_n) \gg (N,p_n) \gg I$ folgt $(N,q_n) = (N,p_n)$ oder $(N,p_n) = I$.

Solche total-primen Nörlund-Matrizen existieren:

Beispiel (6.6): Es sei Z_α $(0 < \alpha < 1)$ die durch $q_0 = \alpha$, $q_1 = 1 - \alpha$, $q_n = 0$ $(n \geq 2)$ erzeugte Nörlund - Matrix (N, q_n).

Behauptung: Z_α ist total - prim.

Beweis: Es sei $Z_\alpha \gg (N, p_n) \gg I$. Dann ist - mit $Z_\alpha = (N, q_n)$ -

$$(N, q_n)(N, p_n)^{-1} \geq 0 \quad \text{und} \quad (N, p_n) \geq 0.$$

Das bedeutet, daß in der Entwicklung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu$$

die Koeffizienten $k_\nu \geq 0$ sind (siehe etwa Debi [55, Th.2]). Die Koeffizienten der Reihen stehen in der Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu p_{n-\nu} = q_n \qquad (n \geq 0).$$

Aus $q_n = 0$ für $n \geq 2$ und $p_n, k_n \geq 0$ folgt $p_n = k_n = 0$ für $n \geq 2$ und $k_1 p_1 = 0$. Entweder ist also $k_1 = 0$ und damit $q_\nu = k_0 p_\nu$ für alle ν, oder es ist $p_1 = 0$. Im ersten Fall ist $(N, q_n) = (N, p_n)$, im zweiten Fall $(N, p_n) = I$.

Derselbe Beweisgedanke führt im folgenden allgemeineren Fall zum Ziel.

Lemma (6.7): Es sei (N,p_n) total-permanent. Für $0 < \alpha < 1$ sei die Folge $q = \{q_n\}$ durch die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = (\alpha + (1-\alpha)x) \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{definiert.}$$

Behauptung: (N,q_n) ist strikt total-stärker als (N,p_n) und aus $(N,q_n) \gg (N,r_n) \gg (N,p_n)$ folgt $(N,q_n) = (N,r_n)$ oder $(N,r_n) = (N,p_n)$.

Beweis: Mit $q_n = \alpha p_n + (1-\alpha)p_{n-1}$ $(p_{-1} = 0)$ beweist man sofort, daß $(N,q_n) \gg (N,p_n)$ gilt. Die Matrizen sind nicht identisch, also ist (N,q_n) strikt total-stärker als (N,p_n).

Sei $(N,q_n) \gg (N,r_n) \gg (N,p_n)$; dann sind in den Entwicklungen

$$q(x)/r(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu = k(x) \quad \text{und}$$

$$r(x)/p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu x^\nu \Big/ \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} k^*_\nu x^\nu = k^*(x)$$

die Koeffizienten k_ν und k^*_ν nicht-negativ. Nach Definition ist $q(x) = p(x)\cdot(\alpha + (1-\alpha)x)$, also $k(x)k^*(x) = \alpha + (1-\alpha)x$. Wegen $k_\nu, k^*_\nu \geq 0$ folgt hieraus $k_1 k^*_1 = 0$ und $k_n = k^*_n = 0$ für $n \geq 2$. Folglich ist entweder $k_1 = 0$, d.h. $k(x) \equiv k_0$, oder $k^*_1 = 0$, d.h. $k^*(x) \equiv k^*_0$. Im ersten Fall haben wir $q_n = k_0 r_n$ und daher $(N,q_n) = (N,r_n)$; im zweiten Fall ist $r_n = k^*_0 p_n$ und daher $(N,r_n) = (N,p_n)$.

7. Ketten von Nörlund - Matrizen

Für nicht-negative Nörlund-Matrizen betrachtet man häufig als neues Produkt

$$(N,r_n) = (N,p_n)*(N,q_n),$$

das durch

$$r_n = (p * q)_n = \sum_{v=0}^{n} p_v q_{n-v}$$

definiert ist. Die Folge $r = \{r_n\}$ ist also die Faltung der Folgen $p = \{p_n\}$ und $q = \{q_n\}$: $r = p * q$.

Für die assoziierten (formalen) Potenzreihen bedeutet dies die (formale) Beziehung

$$r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = p(x)q(x).$$

Man zeigt leicht (vgl. etwa Hardy [49,S.65]):

Bemerkung (7.1): Sind (N,p_n) und (N,q_n) total-permanent, so ist auch $(N,p_n)*(N,q_n)$ total-permanent.

Da die Faltung eine kommutative und assoziative Verknüpfung ist, bilden also die total-permanenten Nörlund-Matrizen bezüglich der Verknüpfung $*$ eine abelsche Halbgruppe $\mathcal{N}^+ = (\mathcal{N}^+, *)$.

Wir zeigen, daß die echte Total-Inklusion eine Ordnung auf $\mathcal{N}^+$ erzeugt.

Definition (7.2): Wir schreiben $(N,q_n) \ggg (N,p_n)$, wenn (N,q_n) strikt total-stärker ist als (N,p_n).

Der folgende Satz ist ein Analogon zu einem Ergebnis von Goffman-Huneke [70,Th.1], welches die gewöhnliche (strikte) Inklusion als Ordnungsrelation behandelt.

Satz 12: Mit $\ggg$ als Ordnungsrelation ist $(\mathcal{N}^+, *)$ eine geordnete abelsche Halbgruppe, d.h. für $(N,p_n),(N,q_n),(N,r_n) \in \mathcal{N}^+$ gilt

(i) $(N,q_n) \ggg (N,r_n)$, $(N,r_n) \ggg (N,p_n) \Longrightarrow (N,q_n) \ggg (N,p_n)$,

(ii) $(N,q_n) \ggg (N,p_n) \Longrightarrow (N,q_n)*(N,r_n) \ggg (N,p_n)*(N,r_n)$.

Beweis: Da (i) direkt aus der Definiton folgt, genügt es, (ii) zu betrachten. Die Voraussetzung in (ii) bedeutet, daß in der Entwicklung

$$q(x)/p(x) = \Sigma\, q_n x^n \,/\, \Sigma\, p_n x^n = \Sigma\, k_n x^n = k(x)$$

die Koeffizienten k_n nicht-negativ sind. Die zu $(N,q_n)*(N,r_n)$ bzw. zu $(N,r_n)*(N,p_n)$ assoziierten Potenzreihen sind gegeben durch $q(x)r(x)$ bzw. $r(x)p(x)$ mit $r(x) = \Sigma\, r_n x^n$. Da die Entwicklung

$$q(x)r(x) \,/\, p(x)r(x) = q(x)/p(x) = \Sigma\, k_n x^n$$

nicht-negative Koeffizienten hat, gilt

$$\left[(N,q_n)*(N,r_n)\right]\left[(N,r_n)*(N,p_n)\right]^{-1} \geq 0.$$

Nach Lemma (5.2) ist daher

$$(N,q_n)*(N,r_n) \gg (N,r_n)*(N,p_n).$$

Die Annahme $(N,q_n)*(N,r_n) = (N,r_n)*(N,p_n)$ führt auf $k(x) \equiv \kappa_0$ und damit auf $(N,q_n) = (N,p_n)$, was der Voraussetzung widerspricht.

Goffman - Huneke [70] stellten die Frage nach maximalen Ketten von Nörlund - Matrizen und zeigten insbesondere (vgl. §6, S.32), daß die Kette der C_α-Matrizen verfeinert werden kann. Außerdem gibt es (total-) permanente Nörlund - Matrizen, z.B. $(N,\cosh\sqrt{n})$ und $(N, e^{\sqrt{n}})$ - siehe Hill [45], Hardy [49,S.109f]) -, die stärker sind als alle C_α $(\alpha > 0)$. Im Sinne der Relation $\supset$ ist also die Kette der Cesàro-Matrizen nicht maximal. Verwendet man dagegen die Relation $\ggg$, so zeigt sich, daß diese Kette nicht verfeinert und nicht verlängert werden kann:

Satz 13:	Es sei $\alpha \geq 0$ und $C_{\alpha+\varepsilon} \ggg (N,p_n) \ggg C_\alpha$ für alle $\varepsilon > 0$.
Behauptung:	$(N,p_n) = C_\alpha$.

Beweis: Wir benützen, wie schon früher, die Darstellungen

$$(N,p_n) = \operatorname{diag}\left\{P_n^{-1}\right\} Z_p \quad \text{und} \quad C_\beta = \operatorname{diag}\left\{\binom{n+\beta}{n}^{-1}\right\} \Sigma^\beta .$$

Aus der Voraussetzung folgt dann $\Sigma^{\alpha+\varepsilon} Z_p^{-1} \geq 0$ für alle $\varepsilon > 0$.

Da die Koeffizienten dieser Matrix stetig von ε abhängen, folgt

$\Sigma^{\alpha} \gamma_p^{-1} \geq 0$ und daher $C_\alpha(N,p_n)^{-1} \geq 0$.

Lemma (5.2) ergibt $C_\alpha \gg (N,p_n)$; C_α und (N,p_n) sind also total-äquivalent. Nach dem Satz von Debi [55,Th.3] sind dann die Matrizen identisch.

Ganz entsprechend beweist man

Satz 13': Es sei $\alpha \geq 0$ und $C_\alpha \gg (N,p_n) \gg C_{\alpha-\epsilon}$ für alle $0 < \epsilon \ (\leq \alpha)$.
Behauptung: $(N,p_n) = C_\alpha$.

Nun zeigen wir, daß es keine Nörlund-Matrix gibt, die total-stärker als alle Cesàro-Matrizen ist, vgl. hierzu Hill [45].

Satz 14: Es sei (N,p_n) total-permanent. Behauptung: Es gibt ein α_o mit $0 \leq \alpha_o \leq p_1/p_o$ derart, daß die Beziehung $(N,p_n) \gg C_\alpha$ für $0 \leq \alpha \leq \alpha_o$, aber nicht für $\alpha > \alpha_o$ gilt.

Beweis: Nach Satz 7 ist $(N,p_n) \gg C_\alpha$ erfüllt genau dann, wenn $\nabla^{\alpha} p_n \geq 0$ für alle $n = 0,1,2,\ldots$ gilt. Bei festem n ist

$$P_n(\alpha) = \nabla^{\alpha} p_n$$

ein Polynom höchstens n-ten Grades. Es sei I_n das größte (abgeschlossene) Intervall der Form $[0,\beta_n]$ mit $0 \leq \beta_n \leq \infty$, in dem $P_n(\alpha) \geq 0$ ist. (Wegen $P_n(0) = \nabla^0 p_n = p_n \geq 0$ liegt 0 in jedem I_n.) Für $n = 1$ erhält man $I_1 = [0,p_1/p_o]$; denn es ist

$$P_1(\alpha) = \nabla^{\alpha} p_1 = p_1 - \alpha p_0 \geq 0 \quad \text{genau für} \quad \alpha \leq p_1/p_0 .$$

Der Durchschnitt $\bigcap I_n$ ist abgeschlossen und hat daher die Form $[0,\alpha_0]$. Nach Konstruktion hat dieses α_0 die behaupteten Eigenschaften Wegen $\bigcap I_n \subseteq I_1$ ist auch $0 \leq \alpha_0 \leq p_1/p_0$.

Folgerung (7.3): Bezüglich der Ordnungsrelation $\gg$ bilden die Matrizen C_α $(0 \leq \alpha < \infty)$ eine maximale Kette in $\mathcal{N}^+$.

Wir betrachten noch einige Beispiele zum Satz 14, insbesondere $(N,\cosh\sqrt{n})$ und $(N,e^{\sqrt{n}})$, die ja stärker als alle C_α $(\alpha \geq 0)$ sind.

Folgerung (7.4) (Rhoades [67,Th3], Debi [55,Th.4]):
$(N,\cosh\sqrt{n}) \gg C_\alpha$ genau dann, wenn $0 \leq \alpha \leq \cosh 1 = 1{,}54\ldots$.

Die Untersuchung der Intervalle I_n, wie sie im Beweis von Satz 14 auftreten, ergibt in diesem Fall $\bigcap I_n = I_1 = [0,p_1/p_0] = [0,\cosh 1]$.

Folgerung (7.5):
$(N,e^{\sqrt{n}}) \gg C_\alpha$ genau dann, wenn $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = (e+\frac{1}{2}) - \sqrt{(e+\frac{1}{2})^2 - 2e^{\sqrt{2}}}$
$= 1{,}75\ldots$.

Man zeigt, daß für $p_n = e^{\sqrt{n}}$ die zweiten Differenzen $\nabla^2 p_n$ für $n \geq 3$ nicht-negativ sind. Aus der Identität $\nabla^{\alpha} p_n = \nabla^{\alpha-2}(\nabla^2 p_n)$ ergibt sich dann für die Intervalle I_n, daß $\bigcap I_n = I_2$ ist. Daher ist α_0 die kleinere der Nullstellen des Polynoms

$$P_2(\alpha) = p_2 - \alpha p_1 + \binom{\alpha}{2} p_1 .$$

Folgerung (7.6):

Es sei (N,p_n) total-permanent und $\inf p_n = 0$.

Behauptung: Für kein $\alpha > 0$ ist (N,p_n) total-stärker als C_α.

Beweis: Daß (N,p_n) nicht total-stärker als C_1 sein kann, folgt schon aus der Folgerung (4.5)(ii). - Für $0 \leq \alpha < 1$ ist $\binom{m-\alpha-1}{m} \leq 0$ $(m = 1,2,\ldots)$ und man kann abschätzen

$$\nabla^\alpha p_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu} p_\nu \leq \binom{n-\alpha-1}{n} p_0 + p_n \leq -\alpha p_0 + p_n \qquad (n \geq 1).$$

Aus der Annahme $(N,p_n) \gg C_\alpha$ (d.h. $\nabla^\alpha p_n \geq 0$ für $n \geq 0$) folgt daher

$\alpha \leq p_n/p_0$ $(n \geq 1)$ und folglich $\alpha \leq \inf (p_n/p_0) = 0$.

Die Kenntnis einer maximalen Kette in $\mathcal{N}^+$ erlaubt es, weitere maximale Ketten zu konstruieren, wenn man die Halbgruppen-Eigenschaft ausnützt. Am einfachsten ist die Konstruktion, wenn man von einer total-primen Nörlund-Matrix ausgeht.

Folgerung (7.7): Es sei (N,p_n) eine total-prime Matrix in $\mathcal{N}^+$.

Behauptung: Bezüglich der Ordnungsrelation $\ggg$ bilden die Matrizen[1]

$$(N,p_n^\alpha) = (N,p_n) * C_\alpha \qquad (\alpha \geq 0)$$

zusammen mit I eine maximale Kette in $\mathcal{N}^+$.

Beweis: Für $\beta > \alpha$ ist auf Grund von Satz 12 (ii)

$$(N,p_n^\beta) \ggg (N,p_n^\alpha) \ggg (N,p_n^0) = (N,p_n) \ggg I.$$

Die Matrizen bilden also eine Kette. Diese kann nach oben nicht verlängert werden. Denn wäre ein (N,q_n) total-stärker als alle

[1] Zur Bildung von (N,p_n^α) vgl. Borwein-Cass [68,§5]

(N,p_n^{α}), so wäre wegen $(N,p_n^{\alpha}) \ggg C_{\alpha}$ die Matrix (N,q_n) auch total-stärker als alle C_{α}. Dies ist auf Grund der Folgerung (7.3) aber nicht möglich.

Die Kette kann auch nicht verfeinert werden. Ist nämlich für festes α

$$(N,p_n^{\alpha+\varepsilon}) \gg (N,q_n) \gg (N,p_n^{\alpha}) \quad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$

so folgt $(N,p_n^{\alpha+\varepsilon})(N,q_n)^{-1} \geq 0$. Die Glieder dieser Matrix sind stetig von ε abhängig; daher ist auch $(N,p_n^{\alpha})(N,q_n)^{-1} \geq 0$. Lemma (5.2) ergibt $(N,p_n^{\alpha}) \gg (N,q_n)$, so daß wir $(N,p_n^{\alpha}) = (N,q_n)$ haben.

Entsprechend zeigt man, daß es zwischen (N,p_n) und allen $(N,p_n^{\alpha-\varepsilon})$ mit $0 < \varepsilon \ll \alpha$ kein echtes Zwischen-Verfahren gibt.

Da (N,p_n) total-prim ist, gibt es auch zwischen (N,p_n) und I kein echtes Zwischen-Verfahren.

Der letzte Beweisgedanke zeigt, wie man weitere maximale Ketten erhalten kann, in dem man etwa von einem (N,p_n) aus geht, das höchstens endlich viele "Primteiler" besitzt. Auch der Aufbau von maximalen Ketten aus total-primen $(N,p_n^{(i)})$ $(i = 1,2,\ldots)$ in der Form

$$\ldots \ggg (N,p_n^{(i+1)}) \gg (N,p_n^{(i)}) \gg \ldots \ggg (N,p_n^{(1)}) \ggg I$$

wird nahegelegt.

Bei der zuletzt angedeuteten Methode ist interessant, daß man mit ihrer Hilfe maximale Ketten (im Sinne der Relation $\ggg$) erhalten kann, deren jedes Glied eine konvergenzgleiche Matrix ist, also keine divergente Folge limitiert. Von letzterem Typ sind die Matrizen Z_α des Beispiels (6.6) für $1/2 < \alpha < 1$ (siehe etwa Zeller - Beekmann [70, S.126]). Da sich das Produkt $Z_\alpha * Z_\beta$ nur in der zweiten Zeile von dem gewöhnlichen Produkt $Z_\alpha Z_\beta$ unterscheidet, überträgt sich die Konvergenzgleichheit von Z_α und Z_β auf $Z_\alpha * Z_\beta$. Entsprechendes gilt für endlich viele Faktoren. In dem folgenden Beispiel sind daher die auftretenden Matrizen alle konvergenzgleich, wenn man zusätzlich $\alpha_\nu > 1/2$ verlangt.

Beispiel (7.8): $\{\alpha_\nu\}_{\nu=1,2,\ldots}$ sei eine Folge mit

$$0 < \alpha_\nu < 1 \quad (\nu = 1,2,\ldots) \text{ und } \Sigma(1-\alpha_\nu) = \infty .$$

Ferner sei $N_0 = I$ und $N_\nu = N_{\nu-1} * Z_{\alpha_\nu}$ für $\nu = 1,2,\ldots$.

Behauptung: Die Kette

$$\ldots \ggg N_m \ggg N_{m-1} \ggg \ldots \ggg N_0$$

ist (bezüglich der Ordnungsrelation $\ggg$) maximal in $\mathcal{N}^+$.

Beweis: Lemma (6.7) zeigt, daß $N_m \ggg N_{m-1}$ $(m = 1,2,\ldots)$ gilt und es kein echtes Zwischen-Verfahren gibt.

Die Kette kann auch nicht verlängert werden: Die zu N_m assoziierte Potenzreihe ist

$$p_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(m)} x^n = \prod_{\mu=1}^{m} (\alpha_\mu + (1-\alpha_\mu)x).$$

Es sei $(N,q_n) \gg N_m$ erfüllt. Ist $q(x) = \Sigma\, q_n x^n$ die zu (N,q_n) assoziierte Potenzreihe, so folgt, daß in

$$q(x)/p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(m)} x^n$$

die $k_n^{(m)} \geq 0$ sind. Insbesondere ist

$$0 \leq k_1^{(m)} = q'(0)/p_m(0) - q(0)p_m'(0)/p_m^2(0),$$

folglich (wegen $p_m(0) = p_o > 0$)

$$q'(0) \geq q(0)p_m'(0)/p_m(0).$$

Die Ausrechnung der logarithmischen Ableitung ergibt

$$p_m'(0)/p_m(0) = \sum_{\mu=1}^{m} (1-\alpha_\mu)/\alpha_\mu > \sum_{\mu=1}^{m} (1-\alpha_\mu).$$

Aus $(N,q_n) \gg N_m$ folgt also notwendig

$$q_1 \geq q_o \sum_{\mu=1}^{m} (1-\alpha_\mu).$$

Diese Beziehung kann nicht für alle $m = 1,2,\ldots$ erfüllt sein, da $\Sigma(1-\alpha_\mu)$ divergiert.

Wir ergänzen das Beispiel durch eine Bemerkung hinsichtlich der gewöhnlichen Inklusion.

Bemerkung (7.9): Besitzt die Folge $\{\alpha_\nu\}$ im Beispiel (7.8) einen Häufungspunkt α mit $0 \leq \alpha < 1/2$, so gibt es keine permanente Nörlund-Matrix, die stärker ist als alle N_m $(m \geq 0)$.

Beweis: Eine solche Matrix, etwa (N,q_n), müßte alle Folgen $\{d_\nu^n\}_{n=0,1,\ldots}$ mit $d_\nu = (\alpha_\nu - 1)/\alpha_\nu$ limitieren. Eine Rechnung zeigt, daß die assoziierte Potenzreihe $q(x) = \sum q_n x^n$ (wegen der Permanenz für $|x| < 1$ konvergent) die Zahlen d_ν^{-1} als Nullstellen hätte. Wegen $|\alpha/(\alpha - 1)| < 1$ hätten die Nullstellen im Einheitskreis einen Häufungspunkt, was $q(x) \equiv 0$ zur Folge hätte.

Die Frage nach genauen Bedingungen, unter denen es eine permanente Matrix (N,q_n) gibt, die stärker als alle N_m ist, bleibt offen.

Literaturverzeichnis

Agnew, R.P. [32] : On Equivalence of Methods of Evaluation of Sequences. Tôhoku Math. J. 35, 244-252 (1932).

Basu, S.K. [49]: On the Total Relative Strength of the Hölder and Cesàro Methods. Proc. London Math. Soc. (2) 50, 447-462 (1949).

- [68a]: On Comparison of the Total Strength of some Hausdorff Methods. II. Math. Z. 103, 358-362 (1968).

- [68b]: On Comparison of the Total Strength of some Hausdorff Methods. III. Math. Z. 106, 181-182 (1968).

- [67]: A Note on Total Equivalence of Triangular Matrices. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 16, 81-86 (1967).

Beekmann, W. [67]: Mercer-Sätze für abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen. Math. Z. 97, 154-157 (1967).

Borwein, D.,a. F.P. Cass [68]: Strong Nörlund Summability. Math. Z. 103, 94-111 (1968).

Bosanquet, L.S. [41]: A Mean Value Theorem. J. London Math. Soc. 16, 146-148 (1941).

- [66]: An Inequality for Sequence Transformations. Mathematika 13, 26-41 (1966).

Debi, S. [55]: Some Results on Total Inclusion for Nörlund Summability. Bull. Calcutta Math. Soc. 47,135-141 (1955).

Goffman, C., a. H.V. Huneke [70] : The Ordered Set of Nörlund Methods. Math. Z. 114, 1-8 (1970).

Hardy, G.H. [49]: Divergent Series. Oxford: At the Clarendon Press 1949

Hill, J.D. [45]: Nörlund Methods of Summability that include the Cesàro Methods of all Positive Orders. Amer. J. Math. 67, 94-98 (1945).

Hurwitz, H.jr. [40]: Total Regularity of General Transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 833-837 (1940).

Hurwitz, W.A. [27]: Some Properties of Methods of Evaluation of Divergent Sequences. Proc. London Math. Soc. 26, 231-248 (1927).

Ishiguro, K. [65a]: The Relation between (N,p_n) and $(\overline{N},p_n)$ Summability. Proc. Japan. Acad. 41, 120-122 (1965).

- [65b]: The Relation between (N,p_n) and $(\overline{N},p_n)$ Summability. II. Proc. Japan. Acad. 41, 773-775 (1965).

Jurkat, W., u. A. Peyerimhoff [52]: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math.Z. 56, 152-178 (1952).

- - [65]: Über Äquivalenzprobleme und andere limitierungstheoretische Fragen bei Halbgruppen positiver Matrizen. Math. Ann. 159, 234-251 (1965).

Knopp, K. [29]: Zur Theorie der Limitierungsverfahren. I, II. Math. Z. 31, 97-127, 276-305.

Kuttner, B. [54]: The Problem of "Total Translativity" for Hölder Summability. J. London Math. Soc. 29, 486-91 (1954).

- [66]: On Totally Regular Summability Methods. Math. Z. 91, 348-354 (1966).

Kuttner, B. a. B.E. Rhoades [68]: Relations between (N,p_n) and $(\overline{N},p_n)$ Summability. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 16, 109-116 (1968/69).

Lorch, L. [57]: Supplement to a theorem of Cesàro. Scripta Mathematica 23, 163-168 (1957).

Lorentz, G.G., a. A. Robinson [54]: Core-Consistency and Total Inclusion for Methods of Summability. Canadian J. Math. 6, 27-34 (1954).

Mazur, S. et W. Orlicz [33]: Sur les méthodes linéaires de sommation. C.R. Acad. Sci. Paris 196, 32-34 (1933).

Miesner, W.[65]: The Convergence Fields of Nörlund Means. Proc. London Math. Soc. (3) 15, 495-507 (1965).

Peyerimhoff, A.[56]: On Convergence Fields of Nörlund Means. Proc. Amer. Math. Soc. 7, 335-347 (1956).

Rhoades, B.E.[60a]: Some properties of Totally Coregular Matrices. Illinois J. Math. 4, 518-524 (1960).

- [60b]: On Total Inclusion for Nörlund Methods of Summability. Calcutta Math. Soc. 52, 123-125 (1960).

- [67]: On the Total Inclusion for Nörlund Methods of Summability. Math. Z. 96, 183-188 (1967).

- [70]: On the Total Inclusion for Nörlund Methods of Summability. II. 113, 171-172 (1970).

Riesz, M.[23]: Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Lit. Sci. Szeged 1, 114-126 (1923).

Russell, D.C.[58]: Note on Inclusion Theorems for Infinite Matrices. J. London Math. Soc. 33, 50-62 (1958).

- [70]: Inclusion Theorems for Section-Bounded Matrix Transformations. Math. Z. 113, 255-265 (1970).

Sargent, W.L.C.[46]: A Mean Value Theorem Involving Cesàro Means. Proc. London Math. Soc. (2) 49, 227-240 (1946).

Schaefer, P.[65]: Core Theorems for Coregular Matrices. Illinois J. Math. 6, 207-211 (1965).

Wilansky, A.[49]: An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc. 67, 59-68.(1949).

Wilansky,A. u. K. Zeller[56]: Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit. Math. Z. 64, 258-269 (1956).

Zeller,K.[51a]: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. 53, 463-487 (1951).

Zeller, K. [51b]: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math.Z. 55, 55-70.(1951).

- [63]: Abschnittsabschätzungen bei Matrixtransformationen. Math. Z. 80, 355-357 (1963).

Zeller, K. u. W. Beekmann [70]: Theorie der Limitierungsverfahren. 2. Aufl., 1970. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 29 56 81

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 295681